



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

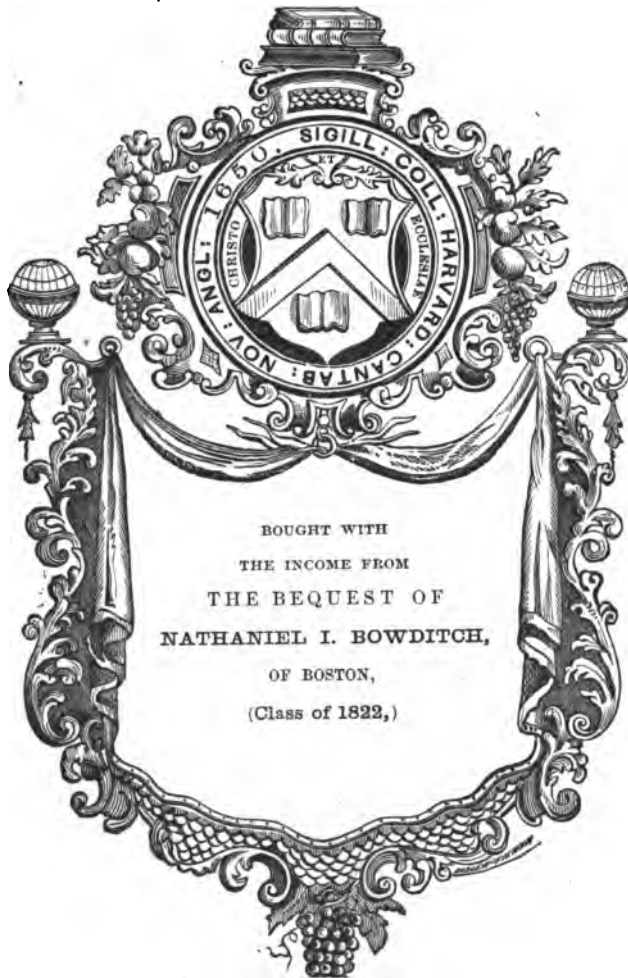
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

Math 3269.03.3



SCIENCE CENTER LIBRARY





Über eine Anwendung der Theorie der linearen  
Differentialgleichungen auf die Differentialgleichung  
der Kugelfunctionen einer Variablen.

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Königl. Universität Greifswald

vorgelegt

und nebst den beigefügten Thesen

öffentlich verteidigt

am Donnerstag, den 18. Juni 1903,

mittags 12 Uhr

von

**Joseph Huss**

aus Wongrowitz.

---

Opponenten:

Herr cand. math. O. Griebenow.

Herr cand. math. E. Nowackiewicz.

Herr cand. phil. P. Söhnlein.

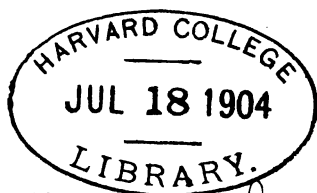
---

Greifswald.

Druck von F. W. Kunike.

1903.

Math 3269.03.3



*Bowditch fund*

---

Gedruckt mit Genehmigung  
der philosophischen Fakultät der Königl. Universität  
Greifswald.

Prof. Dr. Cohen, Dekan.

---

Referent: Geh. Rath Prof. Dr. W. Thomé.

---

**Seiner lieben Mutter.**



1919-1920

Die lineare Differentialgleichung der Kugelfunctionen einer Variablen wird nach der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen behandelt und die auf diese Weise construirten Ausdrücke der Integrale werden mit den Integralen verglichen, die sich ergeben, wenn die Differentialgleichung als Specialfall der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe angesehen wird.

Die lineare Differentialgleichung der Kugelfunctionen einer Variablen lautet

$$(1) \quad (1-x^2) \frac{d^2z}{dx^2} - 2x \frac{dz}{dx} + n(n+1)z = 0.$$

Die linearen homogenen Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse  $n^{\text{ter}}$  Ordnung haben die Gestalt

$$y^{(n)} + \frac{g_{n-1}}{\psi} y^{(n-1)} + \frac{g_{n-2}}{\psi^2} y^{(n-2)} + \dots + \frac{g_0}{\psi^n} y = 0$$

wo  $\psi = (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_\rho)$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_\rho$  die sämtlichen singulären Punkte im Endlichen sind und  $g_\lambda$  eine ganze rationale Function von  $x$  bedeutet, deren Grad  $\leq \lambda$ . Wie aus der Form der Differentialgleichung (1) zu ersehen ist, ist sie demnach eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse mit 2 endlichen singulären

Punkten. Die beiden Punkte sind  $+1$  und  $-1$ , als dritte singuläre Stelle tritt  $x = \infty$  hinzu. Die Gleichungen der Fuchs'schen Klasse haben die Eigenschaft, dass sie nur Stellen der Bestimmtheit besitzen oder, wenn ihre Ordnung gleich  $n$  ist,  $n$  nur reguläre Integrale für jeden Punkt. Haben wir nun eine Gleichung von der Form

$$g_0(x)y^{(m)} + g_1(x)y^{(m-1)} + \dots + g_m(x)y = 0,$$

wobei  $g_0(x)$  eine ganze rationale Function des  $m^{\text{ten}}$  Grades,  $g_k(x)$  eine solche, deren Grad nicht grösser als  $m-k$ ,  $g_m$  von Null verschieden ist und wenn die Integrale regulär sein sollen, so lautet ein Satz von Fuchs\*): „Besitzt die zu  $x = \infty$  gehörige determinierende Fundamentalgleichung ganzzahlige negative Wurzeln und ist  $-r$  diejenige unter ihnen, deren absoluter Betrag  $r$  den kleinsten Wert hat, so hat die obige Differentialgleichung eine ganze rationale Function  $r^{\text{ten}}$  Grades als Integral.“ Die determinierende Fundamentalgleichung einer linearen homogenen Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

an einer endlichen Stelle  $x = a$  lautet

$$\sum_{v=0}^{r=n} \mathfrak{P}_v(a) k(k-1) \dots (k-n+v+1) = 0,$$

wobei  $\mathfrak{P}_v(a)$  die Anfangscoefficienten der gewöhnlichen Potenzreihen von  $(x-a)$ ,  $\mathfrak{P}_v$ , in der zu  $a$  gehörigen, sogenannten Normalform

$$(x-a)^n \mathfrak{P}_0(x-a)y^{(n)} + (x-a)^{n-1} \mathfrak{P}_1(x-a)y^{(n-1)} + \dots + \mathfrak{P}_n(x-a)y = 0.$$

---

\*) Journal für Math. B. 106.

Als die zu  $x = \infty$  gehörige determinierende Fundamentalgleichung wird von Fuchs und den meisten anderen Mathematikern die definiert, die sich ergibt, wenn man in der Differentialgleichung  $x = \frac{1}{z}$  substituiert und die zu  $z = 0$  gehörige bildet. Berechnen wir nach dem Obigen die zu  $x = \infty$  gehörige Fundamentalgleichung unserer Gleichung (1), so lautet sie  $(k-1)k - n(n+1) = 0$  und besitzt, da das  $n$  in dem Coefficienten von (1) eine ganze Zahl ist, die ganzzahligen Wurzeln  $-n$  und  $(n+1)$ . (1) hat auch die von dem Fuchs'schen Satz vorausgesetzte Form und besitzt, wie bereits erwähnt, reguläre Integrale. Wir erhalten demnach eine ganze rationale Function  $n^{\text{ten}}$  Grades  $P_1^n(x)$  als Integral unserer Gleichung. Das eine Integral  $z_i$  jedes zu den beiden singulären Punkten  $+1$  und  $-1$  gehörigen Fundamentalsystems kann sich nur um einen constanten Faktor von  $P_1^n(x)$  unterscheiden, da  $P_1^n(x)$  als ganze rationale Function ohne weiteres eine für das ganze Gebiet von  $x$  gültige Lösung darstellt.

Zu der grösseren Wurzel der zu  $x = \infty$  gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung gehört eine nach absteigenden ganzen Potenzen von  $x$  geordnete mit  $x^{-n-1}$  beginnende Reihe  $Q_1^n(x)$ . Zu einer Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung, welche von keiner anderen Wurzel um eine positive ganze Zahl übertroffen wird, gehört nämlich nach der Theorie der Differentialgleichungen, ohne dass noch einige Bedingungen erfüllt werden müssen, ein reihenförmiges Integral. Für das zu  $x = \infty$  gehörige Integral  $Q_1^n(x)$  suchen wir aber eine andere analytische Gestalt, wie sie die Theorie der Differentialgleichungen liefert, und finden sie mit Hülfe der Daten, die uns diese Theorie giebt, durch spezielle func-

tionentheoretische Betrachtungen. Haben wir an einer singulären Stelle  $a$  ein reihenförmiges Integral  $z_1 = (x-a)^{r_1} \varphi_1(x-a)$  einer Differentialgleichung 2<sup>ter</sup> Ordnung, so liefert das zweite linear unabhängige  $z_2$  die Fuchs'sche Methode. Gehören  $r_1, r_2$  die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung einer Gruppe an, d. h. unterscheiden sie sich nur um ganze Zahlen oder Null von einander und möge  $r_2$  seinem reellen Teil nach nicht grösser sein als  $r_1$ , so ist

$$z_2 = (x-a)^{r_1} \varphi_1 \int (x-a)^{r_2-r_1-1} \varphi_2 dx$$

dies zweite Integral. Das erste reihenförmige Integral  $z_1$  müssen wir, wie es diese Methode erfordert, als zu der grösseren Wurzel gehörig annehmen. Das Integral  $(x-a)^{r_2-r_1-1} \varphi_2$  ist die Lösung der Gleichung für  $y$ , die sich aus der Differentialgleichung 2<sup>ter</sup> Ordnung ergibt, wenn in sie  $y_1 \int y dx$  eingesetzt wird. Nach ausgeführter Integration erhält  $z_2$  die analytische Gestalt  $z_2 = (x-a)^{r_2} [\varphi_{21} + \varphi_{22} \log(x-a)]$ , wobei  $\varphi_{21}, \varphi_{22}$  gewöhnliche Potenzreihen von  $(x-a)$  sind. Sind die Wurzeln  $r_1, r_2$  gleich, so ist das zweite mit dem Logarithmus behattete Glied sicher von Null verschieden.  $\varphi_2$  ist in dem Integral  $(x-a)^{r_2-r_1-1} \varphi_2$  eine gewöhnliche Potenzreihe mit von Null verschiedenem constanten Glied und das Integral beginnt so, da  $r_2 = r_1$  sein soll, mit der  $-1^{\text{ten}}$  Potenz. Nach ausgeführter Integration und Multiplikation wird demnach in

$$z_2 = (x-a)^{r_2} [\varphi_{21} + \varphi_{22} \log(x-a)]$$

$$(x-a)^{r_2} \varphi_{22} \log(x-a)$$

nicht verschwinden. In unserem Fall haben die determinieren-

den Fundamentalgleichungen an der Stelle  $a = +1$ ,  $a = -1$  die Wurzeln  $r_1 = r_2 = 0$ . Das reihenförmige Integral  $z_1$  ist die ganze rationale Function  $P_1^n(x)$  und  $z_1$  ist zu  $r_1$  gehörig. Ordnen wir die rationale ganze Function  $P_1^n(x)$  nach aufsteigenden Potenzen von  $(x-1)$  oder  $(x+1)$ , so beginnt sie mit der 0<sup>ten</sup> Potenz, weil  $r_1$  in  $z_1$  gleich Null ist, und man sagt von  $z_1$ , da es mit der  $r_1$ ten Potenz beginnt, es gehöre zu ihr. Das zweite Integral des Fundamentalsystems an den Stellen  $+1$ ,  $-1$  wird demnach die Gestalt

$$z_2 = \varphi_{21} + c_1 \varphi_{22} \log(x-1)$$

und

$$z_2 = \psi_{21} + c_2 \varphi_{22} \log(x+1)$$

annehmen.

In den  $z_2$  ist  $\varphi_{22} = c_1 z_1$ ,  $c_2 z_1$ , wie man bei der Ableitung der Gestalt  $(x-a)^{r_2} [\varphi_{21} + \varphi_{22} \log(x-a)]$  aus

$$(x-a)^{r_1} \varphi_1 \int (x-a)^{r_2-r_1-1} \varphi_2 dx$$

durch Integration und Multiplikation ersieht.  $\varphi_{21}$ ,  $\psi_{21}$  sind nach der Theorie der Differentialgleichungen gewöhnliche Potenzreihen. Nach Ermittlung der zu den singulären Stellen gehörigen Integrale  $z_2$  gehen wir dazu über, die Umlaufsrelationen und das Verhalten von  $Q_1^n(x)$  in den singulären Punkten zu bestimmen, um hieraus die gesuchte analytische Gestalt zu konstruieren. Die Umlaufsrelationen von  $Q_1^n(x)$  leiten wir aus den zu den Punkten  $+1$ ,  $-1$  gehörigen Fundamentalsystemen ab. Sie lauten, wenn wir mit  $\bar{z}_1$ ,  $\bar{z}_2$  die nach dem Umlauf aus  $z_1$ ,  $z_2$  entstandenen Integrale bezeichnen,

$$\bar{z}_1 = z_1$$

$$\bar{z}_2 = z_2 + 2\pi i c z_1.$$

Bei einer Stelle der Bestimmtheit  $a$  des Gebietes einer Differentialgleichung sind nach der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen die Integrale innerhalb der Umgebung des Punktes  $a$  definiert. Sie besteht bei den im Endlichen gelegenen Punkten aus einem Kreise, der  $a$  zum Mittelpunkt hat und bis zum nächsten singulären Punkt heranreicht. Bei  $a = \infty$  ist im allgemeinen der Definitionsbereich der Teil der Ebene, der ausserhalb des um Null geschlagenen und durch den von Null am weitesten entfernten, endlichen singulären Punkt gehenden Kreises liegt. Der Gültigkeitsbereich für die Integrale  $P_1^n(x)$ ,  $Q_1^n(x)$  liegt nach dem Obigen zum Teil in den Umgebungen der singulären Stellen  $+1$  und  $-1$ .  $P_1^n(x)$  und  $Q_1^n(x)$  werden in den gemeinsamen Gebieten nach der Theorie der Differentialgleichungen eine lineare homogene Verbindung der zu  $+1$  resp.  $-1$  gehörigen Fundamentalsysteme sein von der Form

$$\begin{aligned} P_1^n(x) &= \alpha_{11}^{(k)} z_{k1} + \alpha_{12}^{(k)} z_{k2} \\ Q_1^n(x) &= \alpha_{21}^{(k)} z_{k1} + \alpha_{22}^{(k)} z_{k2} \end{aligned} \quad [k = +1, -1]$$

wobei  $z_{k1}$  das logarithmenfreie,  $z_{k2}$  das logarithmenbehaftete Integral bedeutet. Wie bereits oben bemerkt, ist  $P_1^{(n)}(x)$  gleich  $z_{k1}$ ,  $\alpha_{12}^{(k)}$  muss demnach Null sein.  $P_1^n(x)$ ,  $Q_1^n(x)$  sind linear unabhängig, hieraus  $\alpha_{22} \neq 0$ .  $Q_1^n(x)$  ist so eine lineare homogene Verbindung der ganzen rationalen Function  $z_{k1}$  und der mit dem Logarithmus behafteten  $z_{k2}$  von der Form  $Q_1^n(x) = \alpha_{21}^{(k)} z_{k1} + \alpha_{22}^{(k)} z_{k2}$ , bei der  $\alpha_{22}^{(k)} \neq 0$  ist. Berücksichtigen wir die früher aufgestellten Umlaufsrelationen, so sehen wir, dass  $Q_1^n(x)$  sich beim Umlauf um die singulären Punkte  $+1$ ,  $-1$  um  $2\pi ic_1 P_1^n(x)$ ,  $2\pi ic_2 P_1^n(x)$  vermehrt. Somit haben wir bereits einen Anhaltspunkt für die gesuchte

analytische Gestalt von  $Q_1^n(x)$  gewonnen. Gehen wir weiter. Da  $Q_1^n(x)$  nach der Theorie der Differentialgleichungen eine nach absteigenden ganzen Potenzen von  $x$  geordnete mit  $x^{-n-1}$  beginnende Reihe ist, so kann es sich bei einem Umlauf um  $x = \infty$  nicht ändern. Wir haben somit die Eigenschaften von  $Q_1^n(x)$  bei einem Umlauf um die singulären Punkte gefunden. Nun kommt ein Umlauf von  $x$  auf geschlossenem Wege, der um alle im Endlichen gelegenen singulären Punkte im negativen Sinne, d. h. in der Bewegung eines in  $x = 0$  befestigt gedachten Uhrzeigers besteht, einem positiven Umlauf der Variablen um  $x = \infty$  gleich. Vermehrt sich demnach  $Q_1^n(x)$  um  $2\pi ic P_1^n(x)$  bei einem Umlauf um den Punkt  $+1$ , so muss es bei einem Umlauf um  $-1$  wieder um denselben Betrag abnehmen. Wie die Functionentheorie weiter lehrt, ist der Logarithmus eine Function, die sich bei einem Umlauf in positiver Richtung um  $a$ , wenn ihr Argument  $(x-a)$  und der mit ihr multiplizierte Faktor  $C$  ist, um  $2\pi i C$  vermehrt. Nach dem Vorhergehenden müssen wir  $Q_1^n(x)$  in der Gestalt

$$-cP_1^n(x)\log(x+1) + cP_1^n(x)\log(x-1)$$

vermehrt um eine einwertige Function  $\varphi$  annehmen. Ziehen wir den Ausdruck

$$-cP_1^n(x)\log(x+1) + cP_1^n(x)\log(x-1)$$

von  $Q_1^n(x)$  nämlich ab, so ändert die Differenz sich nicht bei einem Umlauf um die endlichen singulären Punkte  $+1$ ,  $-1$  und ebenfalls um  $x = \infty$ . Ändert sich eine Function beim Umlauf um die singulären Punkte nicht, so ist sie einwertig. Die obige Differenz oder  $\varphi$  ist demnach einwertig. Um die einwertige Function  $\varphi$  näher zu bestimmen, müssen



wir untersuchen, wie sich die obige Differenz in den einzelnen Punkten der  $x$ -Ebene verhält.  $Q_1^*(x)$  wird, wie aus seiner Form  $\alpha_{21}^{(k)} z_{k1} + \alpha_{22}^{(k)} z_{k2}$  zu ersehen, in  $-1, +1$  logarithmisch unendlich wie

$$-cP_1^*(x)\log(x+1) \quad \text{und} \quad +cP_1^*(x)\log(x-1)$$

die Differenz bleibt demnach endlich.  $Q_1^*(x)$  bleibt in allen anderen endlichen Punkten nach der Theorie der Differentialgleichungen endlich und der Ausdruck

$$-cP_1^*(x)\log(x+1) + cP_2^*(x)\log(x-1),$$

wie aus seiner Form zu ersehen, ebenso, die Differenz demnach in endlichen Punkten endlich. In  $x = \infty$  wird  $Q_1^*(x)$ , wie aus der durch die Theorie der Differentialgleichungen erhaltenen Form zu ersehen ist, Null,

$$-cP_1^*(x)\log(x+1) + cP_1^*(x)\log(x-1)$$

wird dagegen in  $x = \infty$  von der  $(n-1)^{\text{ten}}$  Ordnung unendlich, die Differenz demnach ebenso. Eine einwertige Function, die im Endlichen endlich bleibt, im Unendlichen von der  $(n-1)^{\text{ten}}$  Ordnung unendlich wird, ist eine ganze rationale Function  $(n-1)^{\text{ten}}$  Grades. Wir haben somit gefunden, dass  $\varphi$  eine ganze rationale Function  $(n-1)^{\text{ten}}$  Grades ist. Wir entwickeln den Ausdruck  $-c\log(x+1) + c\log(x-1)$ , den wir gleich  $-c\log(1+1/x) + c\log(1-1/x)$  setzen können in der Umgebung von  $x = \infty$  in eine Potenzreihe und thun dies, indem wir  $\log(1+1/x)$  und  $\log(1-1/x)$  einzeln entwickeln. Wir erhalten für

$$\log(1+1/x) = x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3} - \dots$$

und für

$$\log(1-1/x) = -x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{3}x^{-3} - \dots$$

und für den obigen Ausdruck eine nach fallenden Potenzen von  $x$  geordnete Reihe

$$-2c \left\{ x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} + \frac{1}{5}x^{-5} + \dots \right\}.$$

Multiplizieren wir diese Reihe mit  $P_1''(x)$ , vermehren wir den so erhaltenen Ausdruck um  $\varphi$  und ordnen nach fallenden Potenzen, so erhalten wir für

$$Q_1''(x) = -cP_1''(x)\log(x+1) + cP_1''(x)\log(x-1) + \varphi$$

eine Reihe von der Gestalt, wie sie uns die Theorie der Differentialgleichungen liefert und wobei der Coefficient des ersten Gliedes die Constante  $c$  als Faktor enthält. Der Coefficient des ersten Gliedes eines reihenförmigen Integrals ist nach der Theorie der Differentialgleichungen willkürlich. Wir können so der Constanten  $c$  den Wert  $-1/2$  geben.  $Q_1''(x)$  nimmt die Gestalt

$$\frac{1}{2}P_1''(x)\log\frac{(x+1)}{(x-1)} + \varphi \text{ an.}$$

Um die Coefficienten der ganzen rationalen Function  $\varphi$  bestimmen zu können, müssen wir zunächst die Coefficienten von  $P_1''(x)$  mittelst der Theorie der Differentialgleichungen berechnen. Die Coefficienten  $c$  einer sich bei  $x = a$  bestimmt verhaltenden Reihe

$$y = \sum_k c_k (x-a)^k \quad [k = \alpha, \alpha+1, \dots],$$

welche der bereits in Normalform geschriebenen Differentialgleichung

$$(x-a)^n \mathfrak{P}_0(x-a)y^{(n)} + (x-a)^{n-1} \mathfrak{P}_1(x-a)y^{(n-1)} + \dots \\ + (x-a) \mathfrak{P}_{n-1}(x-a)y^{(1)} + \mathfrak{P}_n(x-a)y = 0,$$

wobei  $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$  gewöhnliche Potenzreihen von  $(x-a)$

sind und nicht sämtlich für  $x = a$  verschwinden, bei der ihrem Gebiet angehörigen Stelle  $x = a$  genügen soll, müssen der Recursionsformel

$$F_{ka} = a_{ka} c_a + a_{ka+1} c_{a+1} + \dots + a_{kk} c_k = 0$$

oder dem aus dieser für  $k = \alpha, \alpha+1, \dots$  entspringenden Gleichungssystem genügen.  $a_{ks}$  ist hierbei

$$\sum_{v=0}^{\nu=\alpha} p_{v, k-\alpha} s(s-1) \dots (s-\alpha+v+1),$$

$$p_{v, k} = \frac{\mathfrak{P}_v^{(k)}(x-a)}{\lambda!} \text{ für } x = a, \alpha \text{ Anfangsexponent, } k \text{ durchläuft}$$

die Werte  $\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \dots, s$  die Werte  $\alpha, \alpha+1, \dots, k$  \*)

Für die Stelle  $x = \infty$  ergibt sich die Recursionsformel, wenn

wir die Differentialgleichung durch  $x = \frac{1}{z}$  transformieren und

die für  $z = 0$  gehörige bilden. Die so für  $P_1''(x)$  gebildete

Recursionsformel bricht mit dem  $(2n+1)^{\text{ten}}$  Coefficienten ab,

da aber in  $P_1''(x)$  auch nur  $(n+1)$  Coefficienten vorkommen,

so können sie berechnet werden. Die Entwicklung von

$\log \frac{(x+1)}{(x-1)}$  ist nach dem Vorhergehenden gegeben, die Coeffi-

cienten von  $\varphi$  können wir demnach berechnen.

Da nämlich  $Q_1''(x) - \frac{1}{2} P_1''(x) \log \frac{(x+1)}{(x-1)}$  für jeden Wert

von  $x$  gleich dem Ausdruck  $\varphi$  sein soll, so müssen die Coeffi-

cienten gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten gleich sein.

---

\*) Heffter. Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen S. 12.

Die Coefficienten von  $Q_1^n(x)$  brauchen wir hierzu nicht zu berechnen, weil  $Q_1^n(x)$  erst mit der  $(-n-1)^{\text{ten}}$  Potenz,  $\varphi$  mit der  $(n-1)^{\text{ten}}$  beginnt.

Nachdem wir die Differentialgleichung der Kugelfunctionen einer Variablen nach der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen behandelt haben, schreiten wir jetzt zu der Aufgabe, sie als Spezialfall der Gleichung der hypergeometrischen Reihe oder der Gauss'schen Gleichung

$$y(1-y) \frac{d^2z}{dy^2} + \left\{ \gamma - (\alpha + \beta + 1)y \right\} \frac{dz}{dy} - \alpha\beta z = 0$$

aufzufassen. Setzen wir in dieser Gleichung

$$y = x^2, \quad \alpha = -\frac{n}{2}, \quad \beta = \frac{n+1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2},^{*)}$$

so bekommen wir mit Berücksichtigung, dass

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2x} \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{1}{4x^2} \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{4x^3} \frac{dz}{dx} \text{ ist.}$$

$$x^2(1-x^2) \frac{1}{4x^2} \left( \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} x^2 \right) \frac{1}{2x} \frac{dz}{dx} + \frac{n(n+1)}{4} z = 0.$$

Dieses ist nach geschעהener Reduktion unsere Differentialgleichung (1). Auf die Integrale an der Stelle  $y = \infty$  der Gauss'schen Gleichung kommt für die späteren Untersuchungen es nur an. Sie lauten bekanntlich

$$\text{I.} \quad c_1 y^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{y}\right)$$

$$\text{II.} \quad c_1 y^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{y}\right),$$

\*) Heine, Kugelfunctionen I. 2. Aufl. S. 147.

wenn  $F(\alpha, \beta, \gamma, y)$  die Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}y + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}y^2 + \dots$$

bezeichnet. (1) wird demnach an der singulären Stelle  $\infty$  die Integrale

$$a) \quad P^n(x) = c x^n F\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n+1}{2}, -\frac{2n+1}{2}, x^{-2}\right)$$

$$b) \quad Q^n(x) = c_1 x^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, x^{-2}\right)$$

besitzen. Wir wollen nun  $Q^n(x)$  durch  $P^n(x)$  wie im ersten Teil ausdrücken und können dies vermöge einer Beziehung zwischen hypergeometrischen Reihen. Die betreffende Relation lautet

$$F(\alpha, \beta, \gamma, y) = F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, y) - \frac{\alpha(\gamma-\beta)y}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, y)$$

Setzen wir hierin  $\alpha = -\frac{n}{2}$ ,  $\beta+1 = -\frac{n+1}{2}$ ,  $\gamma+1 = -\frac{2n+1}{2}$ ,  $y = x^{-2}$  und multiplicieren die Gleichung mit  $x^{n+1}$ , so bekommen wir

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^{n+1} F\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n+1}{2}, -\frac{2n+1}{2}, x^{-2}\right) \\ &= x^{n+1} F\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n+1}{2}, -\frac{2n+1}{2}, x^{-2}\right) \\ &\quad - \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)\left(\frac{2n-1}{2}\right)} x^{n-1} F\left(-\frac{n+2}{2}, -\frac{n+1}{2}, -\frac{2n+3}{2}, x^{-2}\right). \end{aligned}$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit dem numerischen Faktor

$\frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{1.2 \dots (n+1)}$  und giebt man der Constanten  $c$  von

$P^n(x) = cx^n F\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n+1}{2}, -\frac{2n+1}{2}, x^{-2}\right)$ , wie es auch in der Theorie

der Kugelfunctionen üblich ist, den Wert  $\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2.3 \dots n}$ , für  $n=0$  den Wert 1, so erhält man

$$(c) \quad P^{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P^n(x) - \frac{n}{n+1} P^{n-1}(x).$$

Dieselbe Relation leiten wir für  $Q^n(x)$  her. Wir setzen in der Beziehung der hypergeometrischen Reihen

$$\alpha = \frac{n+1}{2}, \quad \beta+1 = \frac{n+2}{2}, \quad \gamma+1 = \frac{2n+3}{2}, \quad y = x^{-2}$$

und multiplicieren mit  $x^{-n}$ . Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} (2) \quad x^{-n} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{2n+1}{2}, x^{-2}\right) \\ = x^{-n} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, x^{-2}\right) \\ - \frac{\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{2}}{\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n+3}{2}} x^{-n-2} F\left(\frac{n+3}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+5}{2}, x^{-2}\right). \end{aligned}$$

Multiplizieren wir diesen Ausdruck mit dem Werte

$\frac{1.2.3 \dots n}{1.3 \dots (2n+1)}$  und geben wir dem  $c_1$  in

$$Q_n(x) = c_1 x^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, x^{-2}\right)$$

den Wert  $\frac{1.2.3 \dots n}{1.3 \dots (2n+1)}$ , für  $n = 0$  den Wert 1, so erhalten wir für  $Q(x)$

$$(d) \quad Q^{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x Q^n(x) - \frac{n}{n+1} Q^{n-1}(x).$$

Wie aus (c) und (d) ersichtlich, drücken sich die  $Q(x)$  und  $P(x)$  durch die zwei ihrem Grade nach folgenden  $Q(x)$  und  $P(x)$  in derselben Weise aus.  $P^n(x)$  wird demnach recurrierend aus  $P^1(x)$ .  $P^0(x)$  ebenso wie  $Q^n(x)$  aus  $Q^1(x)$ ,  $Q^0(x)$  in der Form dargestellt

$$(e) \quad \begin{aligned} P^n(x) &= AP^1(x) + BP^0(x) \\ Q^n(x) &= AQ^1(x) + BQ^0(x), \end{aligned}$$

wobei  $A$  und  $B$  gewisse ganze Functionen von  $x$  bezeichnen. Aus (1) S. 12 wird  $P^0(x)$  gleich 1,  $P^1(x) = xP^0(x)$ . Wie aus

$$Q^n(x) = \frac{1.2 \dots n}{1.3 \dots (2n+1)} x^{n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, x^{-2}\right)$$

zu ersehen, wird

$$Q^0(x) = x^{-1} F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, x^{-2}\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

und aus (2) S. 13  $xQ^0(x) - Q^1(x) = 1$ . Mit Berücksichtigung der Formeln (e) S. 14 erhält man

$$P^n(x) = (Ax+B)P^0 = Ax+B$$

$$Q^n(x) = (Ax+B)Q^0 - A, \text{ hieraus}$$

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} P^n(x) \log \frac{x+1}{x-1} - A.*$$

---

\*) Heine, Kugelfunctionen I. 2. Aufl. S. 96.

$A$  ist, wie aus der Herleitung von  $P^n(x)$  aus  $P^0(x)$ ,  $P^1(x)$  zu ersehen ist, eine ganze rationale Function vom Grade  $(n-1)$  und seinen Coefficienten nach leicht zu berechnen.

Wir wollen schliesslich die letzte Aufgabe unseres Thema erledigen, nämlich die auf beide Arten gewonnenen Resultate vergleichen. Im ersten Teil der Arbeit haben wir unsere Differentialgleichung als zur Fuchs'schen Klasse gehörig betrachtet. Im zweiten Teil haben wir sie als Spezialfall der Gauss'schen Gleichung behandelt. Wie wir es bereits oben erwähnt haben, ist  $P_1^n(x)$  eine ganze rationale Function und als solche ist sie für das ganze Gebiet definiert.

$$P^n(x) = cx^n F\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n+1}{2}, -\frac{2n+1}{2}, x^{-2}\right)$$

ist, wie aus der Gestalt dieser hypergeometrischen Reihe leicht ersichtlich, ebenfalls eine ganze rationale Function  $n^{\text{ten}}$  Grades und ist so ohne weiteres für das ganze Gebiet definiert.  $Q_1^n(x)$ ,  $Q^n(x)$  haben in beiden Teilen nach der Theorie der Differentialgleichungen zunächst Gültigkeit für den Teil der Ebene, der ausserhalb des um Null geschlagenen durch  $+1$ ,  $-1$  hindurchgehenden Kreises liegt.  $Q^n(x)$ ,  $(P^n(x))$  als Lösungen unserer Differentialgleichung sind durch eine lineare Verbindung von  $P_1^n(x)$ ,  $Q_1^n(x)$ , in dem gemeinschaftlichen Definitionsbereich nach der Theorie der Differentialgleichungen ausdrückbar. Es ist

$$P^n(x) = c_{11}P_1^n(x) + c_{12}Q_1^n(x)$$

$$Q^n(x) = c_{21}P_1^n(x) + c_{22}Q_1^n(x).$$

Da nun  $P^n(x)$  nur positive Potenzen enthält (siehe S. 12, a),  $Q_1^n(x)$  nur negative (S. 3), so muss  $c_{12} = 0$  sein;  $Q^n(x)$  enthält (S. 21, b) nur negative,  $P_1^n(x)$  (S. 3) positive, demnach



$c_{22} = 0$ .  $P^n(x)$  unterscheidet sich demnach von  $P_1^n(x)$  um einen constanten Faktor,  $Q^n(x)$  von  $Q_1^n(x)$  ebenso.

Sollen Integrale von der Form  $\psi_{21} + \psi_{22} \log(x-a)$  auch noch definiert sein über das ursprüngliche Gebiet hinaus, so müssen die Potenzreihen  $\psi_{21}$ ,  $\psi_{22}$  analytisch fortgesetzt werden. Die Potenzreihen in  $Q_1^n(x)$ ,  $Q^n(x)$  sind nun ganze rationale Functionen, als solche haben sie ohne weiteres Gültigkeit für die ganze Ebene.  $Q_1^n(x)$  wie  $Q^n(x)$  stellt demnach die zweite für das ganze Gebiet gültige Lösung der Differentialgleichung dar. Bei Differentialgleichungen sind die für das ganze Gebiet definierten Lösungen von besonderer Wichtigkeit und deshalb waren die vorhergehenden Untersuchungen allein auch darauf gerichtet, diese zu ermitteln. Betrachten wir das Verhalten von  $Q^n(x)$  in den Punkten  $+1$ ,  $-1$ ,  $\infty$ . Wie aus der analytischen Gestalt von

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} P^n(x) \log \frac{x+1}{x-1} - A$$

zu ersehen, wird es in  $+1$ ,  $-1$  logarithmisch unendlich, nach der Form b S. 12 in  $x = \infty$  Null. Was die Umlaufrelationen von  $Q^n(x)$  um die singulären Punkte anbetrifft, so vermehrt sich  $Q^n(x)$ , wie aus seiner analytischen Gestalt zu ersehen, auf dem geschlossenen Wege um  $-1$  um  $i\pi P^n(x)$ , um  $+1$  um  $-i\pi P^n(x)$ , wenn der Weg in positiver Richtung umlaufen wird. Bei einem Umlauf um  $x = \infty$  bleibt es unverändert. Wir haben somit denselben Gültigkeitsbereich und dasselbe Verhalten in den singulären Punkten und beim Umlauf um sie für  $Q^n(x)$ , wie wir gewonnen haben, als wir zuerst die lineare Differentialgleichung der Kugelfunctionen einer Variablen nach der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen behandelt haben.

## Lebenslauf.

---

Verfasser, Joseph Huss, katholischer Konfession, Sohn des verstorbenen Gerichtsekretärs Gustav Huss, wurde am 1. Februar 1880 zu Wreschen in Posen geboren. Seine Schulbildung erhielt er auf den Gymnasien zu Inowrazlaw, Wodgrowitz und Fürstenwalde a. d. Spree, welches er zu Michaelis 1899 mit dem Zeugnis der Reife verliess, um sich dem Studium der Mathematik und Physik zu widmen. Er bezog die Universität zu Greifswald und bestand am 8. Juni 1903 das rigorosum. Während seiner Studienzeit besuchte er die Vorlesungen folgender Herren Professoren und Dozenten:

Thomé, Study, Kowalewski, Richarz, König, Mie,  
Limpricht, Schwanert, Auwers, Cohen, Deecke,  
Credner, Schuppe, Rehmke, Stock.

Allen seinen hochverehrten Lehrern, insbesondere Herrn Geh. Rath Prof. Dr. Thomé, spricht der Verfasser seinen innigsten Dank aus.

---

## Thesen.

---

### I.

Die determinierende Fundamentalgleichung für  $x = \infty$ , die man im Anschluss an Fuchs und die meisten anderen Mathematiker erhält, ist der vorzuziehen, die man nach dem Vorschlag von Heffter bildet.

### II.

Für Reisebeobachtungen ist die Spitzenaufhängung besser als die Fadenbeobachtung bei Deklinationsbestimmungen.

### III.

Der Anschauungsunterricht auf den humanistischen Gymnasien ist durch Betreibung der Krystallographie zu fördern.

---







